DE SERIEBVS DIVERGENTIBVS.

Auctore LEON. EVLERO.

§. 1.

Cum ſeries conuergentes ita definiantur, vt conſtent terminis continuo decreſcentibus, qui tandem, ſi ſeries in infinitum proceſſerit penitus euaneſcant; facile intelligitur, quarum ſerierum termini infinitesimi non in nihilum abeant, ſed vel finiti maneant, vel in infinitum excreſcant, eas, quia non ſunt conuergentes, ad claſſem ſerierum diuergentium referri oportere. Prout igitur termini ſeriei vltimi, ad quos progreſſione in infinitum continuata peruenitur, fuerint vel magnitudinis finitae, vel infinitae, duo habebuntur ſerierum diuergentium genera, quorum vtrumque porro in duas ſpecies ſubdiuiditur, prout vel omnes termini eodem ſint affecti ſigno, vel ſigna + et − alternatim ſe excipiant. Omnino ergo habebimus quatuor ſerierum diuergentium ſpecies, ex quibus maioris perſpicuitatis gratia aliquot exempla ſubiungam.

I. . . . $1+1+1+1+1+1+$ etc.
$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+$ etc.

II. . . . $1-1+1-1+1-1+$ etc.
$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{5}{6}-\frac{6}{7}+$ etc.

III. . . . $1+2+3+4+5+6+$ etc.
$1+2+4+8+16+32+$ etc.

IV. . . . $1-2+3-4+5-6+$ etc.
$1-2+4-8+16-32+$ etc.

§. 2. De ſummis huiusmodi ſerierum diuergentium magnus eſt diſſenſus inter Mathematicos, dum alii negant, alii affirmant, eas in vna ſumma comprehendi poſſe. Ac primo quidem perſpicuum eſt, ſerierum, quas ad ſpeciem primam retuli, ſummas reuera eſſe infinite magnas, cum terminis actu colligendis ad ſummam dato quouis numero maiorem peruenietur: vnde nullum quidem eſt dubium, quin harum ſerierum ſummae per huiusmodi expreſſiones $\frac{a}{o}$ exhiberi queant. Circa reliquas igitur ſpecies potiſſimum verſatur controuerſia inter Geometras; atque argumenta, quae vtrinque ad ſententiam tuendam afferuntur, tanta vi ad perſuadendum ſunt praedita, vt neutra pars adhuc alteri aſſenſum praebere cogi potuerit.

§. 3. Ex ſpecie ſecunda Leibnitius primus hanc contemplatus eſt ſeriem:

$$1-1+1-1+1-1+1-1+ \text{ etc.}$$

cuius ſummam valere $=\frac{1}{2}$ ſtatuerat, his ſatis firmis rationibus innixus: Primum enim haec ſeries prodit, ſi fractio haec $\frac{1}{1+a}$ per diuiſionem continuam more ſolito in hanc ſeriem $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+$ etc. reſolvatur, et valor litterae a vnitati aequalis ſumatur. Tum vero etiam ad hoc magis confirmandum, iisque, qui calculo non ſunt aſſueti, perſuadendum, ſequenti vſus eſt ratiocinio: Si ſeries alicubi terminetur, terminorumque numerus fuerit par, tum valor eius erit $=0$, ſin autem terminorum numerus ſit impar, valor ſeriei erit $=1$: quodſi ergo ſeries in infinitum progrediatur, numerusque terminorum, neque par, neque impar, cenſeri queat, ſummam neque $=0$, neque $=1$, eſſe poſſe concludit, ſed medium

medium quendam valorem, ab vtroque aeque diuerſum, tenere debere, qui ſit $= \frac{1}{2}$.

§. 4. Contra haec argumenta ab aduerſariis obiici ſolet; primo fractionem $\frac{1}{1+a}$ non eſſe aequalem ſeriei infinitae:

$$1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - \text{ etc.}$$

niſi a ſit fractio vnitate minor. Si enim diuiſio vspiam abrumpatur, et quoto ex reſiduo portio debita adiiciatur, fontem paralogiſmi fore manifeſtum; fieri namque

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots\ldots \pm a^n \mp \frac{a^{n+1}}{1+a}$$

et quamuis numerus n ſtatuatur infinitus, tamen fractionem adiectam $\mp \frac{a^{n+1}}{1+a}$ omitti non licere, niſi re vera euaneſcat, quod iis tantum caſibus, quibus $a < 1$, vſu venit, ſeriesque euadit conuergens. Reliquis autem caſibus ſemper huius mantiſſae $\mp \frac{a^{n+1}}{1+a}$ rationem haberi oportere, et quamuis ſigno dubio $\mp$, prout n fuerit numerus vel par, vel impar, ſit affecta, tamen ſi n ſit infinitus, ideo negligi non poſſe, quod numerus infinitus neque ſit par, neque impar, nullaque propterea habeatur cauſa, vtrum ſignum potius ſit adhibendum? abſurdum enim eſſe putare, quemquam dari numerum integrum, ne infinitum quidem, qui neque par ſit, neque impar.

§. 5. Verum in hac obiectione ab illis, qui ſeriebus diuergentibus determinatas ſummas tribuunt, iure reprehendi ſolet, quod numerus infinitus tanquam numerus determinatus concipiatur, atque adeo vel par, vel impar

impar ſtatuatur, cum tamen ſit indeterminatus. Statim enim atque ſeries dicatur in infinitum progredi, huic ideae contrarium eſſe, ſi eiusdem ſeriei terminus quidam vltimus etſi infiniteſimus concipiatur: ideoque obiectionem ante memoratam de mantiſſa vltimo termino addenda, vel ſubtrahenda, ſponte euaneſcere. Cum igitur in ſerie infinita nunquam ad finem perueniatur, nunquam etiam ad eiusmodi locum perueniri, vbi neceſſe eſſet mantiſſam illam adiungere; adeoque hanc ipſam mantiſſam nonſolum negligi poſſe, ſed etiam debere, quod nuſquam ei locus relinquitur. Atque haec argumenta, quae ad ſummas ſerierum diuergentium vel aſſerendas, vel refellendas, afferuntur, quoque ad quartam ſpeciem ſpectant, quae nullis praeterea dubiis ipſi propriis vexari ſolet.

§. 6. Sed ii, qui contra ſummas ſerierum diuergentium diſputant, in ſpecie tertia firmiſſimum praeſidium inuenire arbitrantur. Quanquam enim harum ſerierum termini continuo creſcunt, ideoque terminis acta colligendis ad ſummam quouis aſſignabili numero maiores perueniri poteſt, quae eſt definitio infiniti; tamen patroni ſummarum in hac ſpecie eiusmodi ſeries admittere coguntur, quarum ſummae ſint finitae, atque adeo negatiuae, ſeu nihilo minores. Cum enim fractio $\frac{1}{1-a}$ per diuiſionem in ſeriem euoluta det; $1+a+a^2+a^3+a^4+$ etc. deberet eſſe:

$-1 = 1+2+4+8+16+$ etc.

$-\frac{1}{2} = 1+3+9+27+81+$ etc.

quod aduerſariis non immerito abſurdiſſimum videtur cum per additionem numerorum affirmatiuorum nunquam

nunquam ad ſummam negatiuam peruenire queat. Hinc-que eo magis neceſſitatem mantiſſae addendae ante memoratae vrgent, cum ea adiecta perſpicuum ſit, fore

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 \ldots\ldots + 2^n + \frac{2^{n+1}}{1-2}$$

etiamſi n ſit numerus infinitus.

§. 7. Defenſores igitur ſummarum ſerierum diuergentium ad hoc inſigne paradoxon conciliandum, ſubtile magis, quam verum, diſcrimen inter quantitates negatiuas ſtatuunt; dum alias nihilo minores, alias vero infinito maiores, ſeu plusquam infinitas eſſe arguunt. Alium ſcilicet valorem ipſius -1 agnoſci debere, quando ex ſubtractione numeri maioris $a+1$, a minori a oriri concipitur, alium vero, quando feriei illi $1+2+4+8+16+$ etc. aequalis reperitur, atque ex diuiſione numeri $+1$ per -1 naſcitur; illo quippe caſu eſſe numerum nihilo minorem, hoc vero infinito maiorem. Maioris confirmationis gratia afferunt hoc exemplum fractionum:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{-1}, \frac{1}{-2}, \frac{1}{-3}, \text{ etc.}$$

quae cum prioribus terminis creſcens perſpiciatur, etiam continuo creſcere ſit cenſenda; vnde concludunt fore $\frac{1}{-1} > \frac{1}{0}$ et $\frac{1}{-2} > \frac{1}{-1}$, ſicque porro: ideoque quatenus $\frac{1}{-1}$ per -1 et $\frac{1}{0}$ per infinitum ∞ exprimitur, eſſe $-1 > \infty$, multoque magis $\frac{1}{-2} > \infty$: quo pacto abſurditatem apparentem illam ſatis ingenioſe a ſe propellunt.

§. 8. Quamuis autem haec diſtinctio ingenioſe excogitata videatur, tamen aduerſariis parum ſatisfacit, atque adeo certitudini analyſeos vim afferre videtur. Si enim bini illi valores ipſius -1, quatenus eſt vel $= 1-2$,

vel $= \frac{1}{1}$, inter se re vera discrepent, vt eos confunde-re non liceat, certitudo atque vsus regularum, quas in calculis sequimur, penitus tolleretur, quod certe magis fo-ret absurdum, quam id, cuius gratia haec distinctio est ex-cogitata; sin autem sit $1-2=\frac{1}{1}$, vti praecepta alge-brae postulant, negotium minime conficitur, cum ea ipsa quantitas -1, quae seriei $1+2+4+8+$ etc. aequalis statuitur, sit nihilo minor, ideoque eadem difficultas permaneat. Interim tamen veritati consentaneum videtur, si dicamus easdem quantitates, quae sint nihilo minores, simul infinito maiores censeri posse. Non so-lum enim ex algebra, sed etiam ex geometria discimus, duplicem dari saltum a quantitatibus positiuis ad negati-vas, alterum per cyphram, seu nihilum, alterum per in-finitum: atque adeo quantitates a cyphra, tam crescendo, quam decrescendo, in se redire, et ad eundem terminum 0 reuerti; ita vt quantitates infinito maiores eaedem perinde sint nihilo minores, ac quantitates infinito mi-nores conueniunt cum quantitatibus nihilo maioribus.

§. 9. Qui autem negant has summas serierum di-vergentium, quae assignari solent, esse iustas, iidem non solum non alias proferunt, sed etiam statuunt omnino pugnare, summam serieri diuergentis tantum imaginari. Conuergentium enim serierum, veluti huius $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+$ etc. ideo tantum summam $=2$ ad-mitti posse, quod quo plures istius seriei terminos actu addamus, eo propius nos ad binarium peruenire: in se-riebus vero diuergentibus rem longe secus se habere; quo plures enim terminos addamus, eo magis summas,

quae

quae prodeunt, inter se discrepare, neque ad certum ac determinatum quemdam valorem accedere. Vnde concludunt, ne ideam quidem summae ad series diuergentes transferri posse, eorumque operam, quae in summis serierum diuergentium inuestigandis consumatur, plane esse inutilem, verisque analyseos principiis contrariam.

§. 10. Quantumuis autem iste dissensus realis videatur, tamen neutra pars ab altera vllius erroris argui potest, quoties in analysi huiusmodi serierum vsus occurrit: quod graui argumento esse debet, neutram partem in errore versari, sed totum dissidium in solis verbis esse positum. Si enim in calculo peruenio ad hanc seriem $1-1+1-1+1-1+$ etc. eiusque loco substituo $\frac{1}{2}$; nemo certe mihi iure errorem imputabit; qui tamen nemini non in oculos incurreret, si alium quemuis numerum eius seriei loco posuissem; vnde nullum dubium superesse potest, quin series $1-1+1-1+1-1+$ etc. et fractio $\frac{1}{2}$ sint quantitates aequiualentes, alteramque alterius loco semper sine errore substitui licere. Tota igitur quaestio huc tantum redire videtur, an fractionem $\frac{1}{2}$ recte summam seriei $1-1+1-1+$ etc. vocemus? quod, qui pertinaciter negant, cum tamen aequiualentiam negare non audeant, vehementer verendum est, ne in logomachiam delabantur.

§. 11. Puto autem, totam hanc litem facile compositum iri, si ad sequentia sedulo attendere velimus. Quoties in analysi ad expressionem vel fractam, vel transcendentem, pertingimus; toties eam in idoneam seriem conuertere solemus, ad quam sequens calculus commodius applicari queat. Eatenus ergo tantum series

infinitae in analyſi locum inueniunt, quatenus ex euolutione cuiuspiam expreſſionis finitae ſunt ortae; et hanc ob rem in calculo ſemper loco cuiusque ſeriei infinitae eam formulam, ex cuius evolutione eſt nata, ſubſtituere licet. Hinc quemadmodum ſummo cum fructu regulae tradi ſolent, expreſſiones finitas, ſed forma minus idonea praeditas, in ſeries infinitas conuertendi, ita viciſſim vtiliſſimae ſunt cenſendae regulae, quarum ope, ſi propoſita fuerit ſeries infinita quaecunque, ea expreſſio finita inueſtigari queat, ex qua ea reſultet; et cum haec expreſſio, ſemper ſine errore loco ſeriei infinitae ſubſtitui poſſit, neceſſe eſt, vt vtriusque idem ſit valor; ex quo efficitur, nullam dari ſeriem infinitam, quin ſimul expreſſio finita illi aequiualens concipi queat.

§. 12. Si igitur receptam ſummae notionem ita tantum immutemus, vt dicamus, cuiusque ſeriei ſummam eſſe expreſſionem finitam, ex cuius euolutione illa ipſa ſeries naſcatur; omnes difficultates, quae ab vtraque parte ſunt commotae, ſponte euaneſcent. Primo enim ea expreſſio, ex cuius euolutione naſcitur ſeries conuergens, eius ſimul ſummam, voce hac vulgari ſenſu accepta, exhibet, neque ſi ſeries fuerit diuergens, quaeſtio amplius abſurda reputari poterit, ſi eam indagemus expreſſionem finitam, quae ſecundum regulas analyticas euoluta, illam ipſam ſeriem producat. Et quoniam iſtam expreſſionem in calculo loco eius ſeriei ſubſtituere licet, quin eidem ſit aequalis, dubitare non poterimus. Quo euicto, ne a recepto quidem loquendi vſu recedimus, ſi eam expreſſionem, quae cuipiam ſeriei aequalis eſt, eius quoque ſummam vocemus: dummodo pro

ſeriebus diuergentibus, non eam notionem cum idea ſummae coniungamus, quod, quo plures termini actu colligantur, eo propius ad valorem ſummae accedi debeat.

§. 13. His praemiſſis neminem fore arbitror, qui me reprehendendum putet, quod in ſummam ſequentis ſeriei diligentius inquiſiuerim:

$$1-1+2-6+24-120+720-5040+40320-\text{etc.}$$

quae eſt ſeries a Walliſio hypergeometrica dicta, ſignis alternantibus inſtructa. Haec ſeries autem eo magis notatu digna videtur, quod plures ſummandi methodos, quae mihi alias in huiusmodi negotio ingentem vſum praeſtiterunt, hic fruſtra tentauerim. Primo quidem dubitare licet, vtrum haec ſeries ſummam habeat finitam, nec ne? quia multo magis diuergit, quam vlla ſeries geometrica; ſummam autem geometricarum eſſe finitam, extra dubium eſt poſitum. Veruntamen cum in geometricis diuergentia non obſtet, quominus ſint ſummabiles, ita veriſimile videtur, et hanc ſeriem hypergeometricam ſummam habere finitam. Quaeritur ergo in numeris, proxime ſaltem, valor eius expreſſionis finitae, ex cuius euolutione ipſa ſeries propoſita naſcitur.

§. 14. Primo autem vſus ſum methodo, quae hoc nititur fundamento: ſi propoſita ſit huiusmodi ſeries:

$$s = a - b + c - d + e - f + g - h + \text{etc.}$$

atque neglectis ſignis terminorum $a, b, c, d, e, f,$ etc. ſumantur differentiae: $b-a, c-b, d-c, e-d,$ etc. harumque porro differentiae: $c-2b+a$; $d-2c+b$;

$e-2d+c$, etc. quae dicuntur differentiae secundae; similique lege quaerantur differentiae tertiae, quartae, quintae, etc. tum si harum differentiarum primarum, secundarum, tertiarum, quartarum etc. termini primi sint α, β, γ, δ, etc. dico fore eiusdem seriei propositae summam

$$s = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{4} + \frac{\gamma}{8} - \frac{\delta}{16} + \frac{\varepsilon}{32} - \text{etc.}$$

quae nisi iam sit conuergens, tamen certo multo magis conuerget, quam proposita; vnde si huic posteriori seriei denuo eadem methodus applicetur, valor, seu summa quaesita s, expressa reperietur per seriem adhuc magis conuergentem.

§. 15. Methodus haec maximam habet vtilitatem in summandis seriebus diuergentibus secundae et quartae speciei, siue tandem ad differentias constantes perueniatur, siue secus, dummodo diuergentia non sit nimis magna. Sic si sit $s = 1-1+1-1+1-\text{etc.}$

ob $a=1$, $\alpha=0$, $\beta=0$ etc. erit $s=\frac{1}{2}$.

Si sit $s = 1-2+3-4+5-6+\text{etc.}$

diff. 1 1, 1, 1, 1, 1. etc.

erit $s = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$; vti aliunde satis constat:

si sit $s = 1-4+9-16+25-36+\text{etc.}$

Diff. I . . 3 5 7 9 11

diff. II . . . 2, 2, 2 2

erit $s = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = 0$, vti quoque notum est:

sit sit $s = 1-3+9-27+81-243+\text{etc.}$

Diff.

Diff. 1 . . 2, 6, 18, 54, 162
diff. 2 . . . 4, 12, 36, 108
diff. 3 . . . . 8, 24, 72
diff. 4 . . . . . 16, 48
etc.

eritque $s = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{6}{8} - \frac{18}{16} + \text{etc.} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \text{etc.} = \frac{3}{7}$

§. 16. Adhibeatur iam haec methodus ad seriem propositam

$A = 1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - 5040 + 40320 - \text{etc.}$

quae ob $1 - 1 = 0$, si per 2 diuidatur, abit in hanc:

$\frac{A}{2} = 1 - 3 + 12 - 60 + 360 - 2520 + 20160 - 181440 + \text{etc.}$

2, 9, 48, 300, 2160, 17640, 161280
7, 39, 252, 1860, 15480, 143640
32, 213, 1608, 13620, 128160
181, 1395, 12012, 114540
1214, 10617, 102528
9407, 91911
82504

Hinc ergo sequitur fore:

$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{7}{8} - \frac{32}{16} + \frac{181}{32} - \frac{1214}{64} + \frac{9407}{128} - \frac{82504}{256} + \text{etc.}$

seu $A = \frac{7}{4} - \frac{32}{8} + \frac{181}{16} - \frac{1214}{32} + \frac{9407}{64} - \frac{82504}{128} + \text{etc.}$

$\frac{15}{8}, \frac{117}{16}, \frac{852}{32}, \frac{6979}{64}, \frac{63690}{128}$
$\frac{81}{16}, \frac{618}{32}, \frac{5275}{64}, \frac{47772}{128}$
$\frac{456}{32}, \frac{4089}{64}, \frac{36918}{128}$
$\frac{3127}{64}, \frac{32104}{128}$
$\frac{24850}{128}$

Ergo

Ergo $A = \frac{7}{8} - \frac{18}{32} + \frac{81}{128} - \frac{456}{512} + \frac{3127}{2048} - \frac{24850}{8192} +$ ect.

ſeu $A - \frac{5}{16} = \frac{81}{128} - \frac{456}{512} + \frac{3127}{2048} - \frac{24850}{8192} +$ etc.

$\frac{132}{512}$; $\frac{1303}{2048}$, $\frac{12342}{8192}$

$\frac{775}{2048}$; $\frac{7180}{8192}$

$\frac{4030}{8192}$

Ergo $A - \frac{5}{16} = \frac{81}{256} - \frac{132}{2048} + \frac{775}{16384} - \frac{4030}{131072}$

ſeu $A = \frac{5}{16} + \frac{516}{2048} + \frac{2170}{131072}$ etc. $= \frac{38077}{65536} = 0,5811$.

Apparet ergo ſummam iſtius ſeriei propemodum eſſe $= 0,581$; ob terminos autem neglectos aliquanto erit maior: quod egregie conuenit cum infra demonſtrandis, vbi huius ſeriei ſumma oſtendetur eſſe $= 0,59634739$: ſimul vero patet, hanc methodum non ſatis eſſe aptam, ad ſummam tam exacte definiendam.

§. 17. Deinde alio modo rem ſic tentaui: ſit propoſita haec ſeries:

	1	2	3	4	5	6	7		n	$n+1$
B ...	1,	2,	5,	16,	65,	326,	1957,	...	P,	$nP+1$
differentiae	1,	3,	11,	49,	261,	1631				
		2,	8,	38,	212,	1370				
			6,	30,	174,	1158				
				24,	144,	984				
					120,	840				
						720				

cuius differentiarum continuarum termini primi ſint 1, 2, 6, 24, 120, 720, etc. erit terminus exponenti n reſpondens

$P =$

$$P = 1 + (n-1) + (n-1)(n-2) + (n-1)(n-2)(n-3) + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + \text{etc.}$$

Hinc si fiat $n = o$, erit terminus exponenti o respondens, seu primum praecedens $= 1-1+2-6+24-120+720-\text{etc.} = A$; ita vt si huius seriei terminus exponenti o respondens inueniri posset, idem simul futurus esset valor, seu summa seriei propositae

$$A = 1-1+2-6+24-120+720-\text{etc.}$$

Quodsi ergo illa series B inuertatur, vt habeatur series

	1	2	3	4	5	6	7	
C	1,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{3}$,	$\frac{1}{10}$,	$\frac{1}{65}$,	$\frac{1}{350}$,	$\frac{1}{1957}$,	etc.

erit huius seriei terminus exponenti o respondens $= \frac{1}{A}$, vnde ex eo quoque valor ipsius A cognosci poterit. Inchoent huius seriei singulae differentiae terminis α, β, γ, δ, ε, etc. differentiis scilicet hic ita capiendis, vt quiuis terminus a praecedente substrahatur, erit terminus exponenti n respondens:

$$\frac{1}{P} = 1 - (n-1)\alpha + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}\beta - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\gamma + \text{etc.}$$

Ideoque posito $n = o$, erit per seriem certo conuergentem:

$$\frac{1}{A} = 1 + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$$

Est vero, has fractiones in decimales conuertendo:

	diff. 1	diff. 2	diff. 3	diff. 4	diff. 5
$\frac{1}{1} = 1,0000000$					
$\frac{1}{2} = 0,5000000$	5000000	2000000			
$\frac{1}{5} = 0,2000000$	3000000	1625000	375000	−346154	
$\frac{1}{16} = 0,0625000$	1375000	903846	721154	+165291	−511445
$\frac{1}{65} = 0,0153846$	471154	347983	555863	+305486	−140195
$\frac{1}{326} = 0,0030675$	123171	97606	270377	+173956	+131530
$\frac{1}{1957} = 0,0005110$	25565	21185	76421	+ 58977	+114979
0,0000730	4380	3741	17444	+ 14261	+ 44716
0,0000091	639	558	3183	+ 2697	+ 11564
0,0000010	81	72	486	+ 422	+ 2275
0,0000001	9	8	64	+ 57	+ 365
	1	1	7	+ 6	+ 51
			1		

Ex his ergo differentiis foret $\frac{\pi}{A} = 1,6517401$, et $A = 0,6$; qui satis bene cum ante inuento conuenit; sed tamen ob differentias quartas, quintas, et aliquot sequentium negatiuas, haec methodus, non satis est certa.

§. 18. Sumamus seriei B singulorum terminorum logarithmos, vt habeatur haec noua series

1 2 3 4 5 6 7 8

D .... $l1, l2, l5, l16, l65, l326, l1957, l13700$, etc.

in cuius differentiis continuis more solito sumtis sint termini primi α, β, γ, δ, ε, etc. eritque huius seriei terminus exponenti o respondens $= o - \alpha + \beta - \gamma + \delta - \varepsilon +$ etc. qui igitur erit logarithmus summae quaesitae $= A$. Sunt vero hi logarithmi cum differentiis continuis sequentes:

diff.

	diff. 1	diff. 2	diff. 3	diff. 4	diff. 5	diff. 6	diff. 7	diff. 8
0,0000000	0,3010300							
0,3010300	0,3979400	969100	103000					
0,6989700	0,5051500	1072100	− 35666	−138666				
1,2041200	0,6087934	1036434	−121326	− 85660	+53006	+19562		
1,8129134	0,7003042	915108	−134418	− 12092	+72568	− 38182	−57744	465446
2,5132176	0,7783733	789690	−113124	+ 21294	+34386	− 30480	+ 7702	
3,2915908	0,8451298	667566	− 87924	+ 25200	+ 3906			
4,1397206	0,9030940	579642						
5,0398146								

ergo erit:

lA =	diff. 1	diff. 2	diff. 3	diff. 4	diff. 5	diff. 6
− 0,3010300 +						
+ 0,0969100 +	+ 2041200	+1175100				
− 0,0103000 +	+ 866100	+1624434	+550666			
− 0,0138666 −	+ 241666	+ 43338	+191096	+359570		
− 0,0053006 +	− 191672	− 225116	+658454	−467358	+ 826928	
+ 0,0019562 +	+ 33444	− 43862	−181254	+830708	−1307066	+2133994
+ 0,0057744 −	+ 77306	+ 200496	−244358	+ 631104	+ 776604	−2083670
+ 0,0065446 +	− 123190					

vnde per methodum ante expoſitam erit

$$l\frac{I}{A} = \frac{0,3010300}{2} + \frac{2041200}{4} + \frac{1175100}{8} + \frac{550666}{16} + \frac{359570}{32} + \frac{826928}{64} + \text{etc.}$$

ſeu $l\frac{A}{I} = 0,7779088$ hincque $A = 0,59966$, quem numerum adhuc vero maiorem eſſe, facile colligere licet. Interim tamen et hoc modo neque ſatis tuto, neque ſatis commode, ad cognitionem valoris A peruenire poteſt, etſi haec methodus infinitas ſuppeditat vias hunc valorem inveſtigandi; quarum quidem aliae aliis ad hunc ſcopum multo aptiores videntur.

§. 19. Inveſtigemus nunc etiam analytice huius ſeriei valorem, eam vero in latiori ſenſu accipiamus: ſit igitur

$$s = x - 1x^2 + 2x^3 - 6x^4 + 24x^5 - 120x^6 + \text{etc.}$$

quae differentiata dabit:

$$\frac{ds}{dx} = 1 - 2x + 6xx - 24x^3 + 120x^4 - \text{etc.} = \frac{x-s}{xx}$$

vnde fit $ds + \frac{s\,dx}{xx} = \frac{dx}{x}$, cuius aequationis, ſi e ſumatur pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus eſt $= 1$, integrale erit $e^{-1:x}s = \int \frac{e^{-1:x}dx}{x}$ et $s = e^{1:x}\int \frac{e^{-1:x}dx}{x}$. Caſu ergo quo $x = 1$ erit $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + \text{etc.} = e\int \frac{e^{-1:x}dx}{x}$. Exprimit ergo haec ſeries aream lineae curuae, cuius natura inter abſciſſam x et y hac continetur aequatione $y = \frac{e.e^{-1:x}}{x}$, ſi abſciſſa x ponatur $= 1$: ſeu erit $y = \frac{e}{e^{1:x}x}$. Haec autem curua ita eſt comparata, vt poſito $x = 0$ fiat $y = 0$; ſin autem ſit $x = 1$, erit $y = 1$: medii vero applicatae valores ita ſe habebunt, vt

si sit	fiat	si sit	fiat
$x = \frac{0}{10}$	$y = 0$	$x = \frac{5}{10}$	$y = \frac{10}{5e^{5:5}} = \frac{2}{e}$
$x = \frac{1}{10}$	$y = \frac{10}{e^{9:1}}$	$x = \frac{6}{10}$	$y = \frac{10}{6e^{4:6}}$
$x = \frac{2}{10}$	$y = \frac{10}{2e^{8:2}}$	$x = \frac{7}{10}$	$y = \frac{10}{7e^{3:7}}$
$x = \frac{3}{10}$	$y = \frac{10}{3e^{7:3}}$	$x = \frac{8}{10}$	$y = \frac{10}{8e^{2:8}}$
$x = \frac{4}{10}$	$y = \frac{10}{4e^{6:4}}$	$x = \frac{9}{10}$	$y = \frac{10}{9e^{1:9}}$

Hac igitur curva constructa, statim patebit, eius aream abscissae $x = 1$ respondentem, non solum esse finitam, sed etiam minorem esse quadrato lateris $= 1$, maiorem vero eius semissi $\frac{1}{2}$. Quodsi vero basis $x = 1$ in decem partes aequales diuidatur, et portiones areae tanquam trapezia spectentur, et areae inuestigentur, obtinebitur seriei $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ etc. $= A$ valor vero proximus:

$$A = 0 + \frac{1}{e^{9:1}} + \frac{1}{2e^{8:2}} + \frac{1}{3e^{7:3}} + \frac{1}{4e^{6:4}} + \frac{1}{5e^{5:5}} + \frac{1}{6e^{4:6}} + \frac{1}{7e^{3:7}} + \frac{1}{8e^{2:8}} + \frac{1}{9e^{1:9}} + \frac{1}{20}$$

Qui termini, cum sit $e = 2,71828182\,8$, induent sequentes valores:

$\frac{1}{e^{9:1}}$

$$\frac{1}{e^{9:1}} = 0,000012340$$

$$\frac{1}{2e^{8:2}} = 0,009157820$$

$$\frac{1}{3e^{7:3}} = 0,032323240$$

$$\frac{1}{4e^{6:4}} = 0,055782530$$

$$\frac{1}{5e^{5:5}} = 0,073575870$$

$$\frac{1}{6e^{4:6}} = 0,085569500$$

$$\frac{1}{7e^{3:7}} = 0,093062700$$

$$\frac{1}{8e^{2:8}} = 0,097350020$$

$$\frac{1}{9e^{1:9}} = 0,099426560$$

$$\frac{1}{20} = 0,050000000$$

hinc $A = 0,596371640$

qui valor a vero iam vix sensibiliter differt. Si autem abscissa in plures partes fuisset diuisa, tum iste valor accuratius esset inuentus.

§. 20. Cum inuenta sit summa $A = \int \frac{e^{x-1:x} x dx}{x}$, ponatur $v = e^{x-1:x}$, ita vt posito $x = 0$ fiat et $v = 0$, ac

ac posito $x = 1$, $v = 1$, erit $1 - \frac{1}{x} = lv$, et $x = \frac{1}{1-lv}$, atque $lx = -l(1-lv)$, vnde fit $\frac{dx}{x} = \frac{dv}{v(1-lv)}$. Quia ergo est $A = \int \frac{v\,dv}{x}$ posito $x = 1$, vel $v = 1$, erit quoque $A = \int \frac{dv}{1-lv}$ posito post integrationem $v = 1$. Erit autem integratione per seriem infinitam peracta $A = \int \frac{dv}{1-lv}$ $= \frac{v}{1-lv} - \frac{1v}{(1-lv)^2} + \frac{1.2v}{(1-lv)^3} - \frac{1.2.3v}{(1-lv)^4} + \frac{1.2.3.4v}{(1-lv)^5} -$ etc. et posito $v = 1$ ob $lv = 0$, erit, vti assumsimus,

$$A = 1 - 1 + 1.2 - 1.2.3 + 1.2.3.4 - 1.2.3.4.5 + \text{etc.}$$

Erit ergo A iterum area curuae, cuius natura inter abscissam v et applicatam y hac exprimitur aequatione $y = \frac{1}{1-lv}$, si quidem ponatur abscissa $v = 1$, quo casu quoque fit $y = 1$. Notari autem hic oportet lv denotare logarithmum hyperbolicum ipsius v. Abscissa ergo $v = 1$ denuo in decem partes diuisa, applicatae in singulis diuisionum punctis se habebunt hoc modo:

si sit	erit	si sit	erit
$v = \frac{0}{10}$	$y = 0$	$v = \frac{5}{10}$	$y = \frac{1}{1+l10-l5}$
$v = \frac{1}{10}$	$y = \frac{1}{1+l10-l1}$	$v = \frac{6}{10}$	$y = \frac{1}{1+l10-l6}$
$v = \frac{2}{10}$	$y = \frac{1}{1+l10-l2}$	$v = \frac{7}{10}$	$y = \frac{1}{1+l10-l7}$
$v = \frac{3}{10}$	$y = \frac{1}{1+l10-l3}$	$v = \frac{8}{10}$	$y = \frac{1}{1+l10-l8}$
$v = \frac{4}{10}$	$y = \frac{1}{1+l10-l4}$	$v = \frac{9}{10}$	$y = \frac{1}{1+l10-l9}$
$v = \frac{5}{10}$	$y = \frac{1}{1+l10-l5}$	$v = \frac{10}{10}$	$y = 1$

Hincque iterum per appropinquationem areae valor litterae A satis accurate obtinebitur.

§. 21.

§. 21. Datur vero alius modus in ſummam huius ſeriei inquirendi ex natura fractionum continuarum petitus, qui multo facilius et promtius negotium conficit: ſit enim formulam generalius exprimendo:

$$A = 1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \text{etc.} = \frac{1}{1+B}$$

$$\text{erit } B = \frac{1x - 2x^2 + 6x^3 - 24x^4 + 120x^5 - 720x^6 + 5040x^7 - \text{etc.}}{1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \text{etc.}} = \frac{x}{1+C}$$

$$\text{et } 1 + C = \frac{1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \text{etc.}}{1 - 2x + 6x^2 - 24x^3 + 120x^4 - 720x^5 + 5040x^6 - \text{etc.}}$$

$$\text{Ergo } C = \frac{x - 4x^2 + 18x^3 - 96x^4 + 600x^5 - 4320x^6 + \text{etc.}}{1 - 2x + 6x^2 - 24x^3 + 120x^4 - 720x^5 + \text{etc.}} = \frac{x}{1+D}$$

$$\text{vnde } D = \frac{2x - 12x^2 + 72x^3 - 480x^4 + 3600x^5 - \text{etc.}}{1 - 4x + 18x^2 - 96x^3 + 600x^4 - \text{etc.}} = \frac{2x}{1+E}$$

$$\text{Porro } E = \frac{2x - 18x^2 + 144x^3 - 1200x^4 + \text{etc.}}{1 - 6x + 36x^2 - 240x^3 + \text{etc.}} = \frac{2x}{1+F}$$

$$\text{Atque } F = \frac{3x - 36x^2 + 360x^3 - \text{etc.}}{1 - 9x + 72x^2 - 600x^3 + \text{etc.}} = \frac{3x}{1+G}$$

$$\text{Erit } G = \frac{3x - 48x^2 + \text{etc.}}{1 - 12x + 120x^2} = \frac{3x}{1+H}$$

$$\text{Sic } H = \frac{4x - \text{etc.}}{1 - 16x} = \frac{4x}{1+I}$$

Sicque porro patebit fore $I = \frac{4x}{1+K}$, $K = \frac{1x}{5+L}$; $L = \frac{5x}{1+M}$ etc. in infinitum, ita vt harum formularum ordo facile perſpiciatur. His autem valoribus ſucceſſive ſubſtitutis, erit

$$1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \text{etc.} =$$

$$A =$$

$$A = \cfrac{1}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{4x}{1+\cfrac{4x}{1+\cfrac{5x}{1+\cfrac{5x}{1+\cfrac{6x}{1+\cfrac{6x}{1+\cfrac{7x}{\text{etc.}}}}}}}}}}}}}}$$

§. 22. Quemadmodum autem huiusmodi fractionum continuarum valor sit inuestigandus, alibi ostendi: Scilicet cum singulorum denominatorum partes integrae sint vnitates, soli numeratores in computum veniunt; sit ergo $x = 1$, atque inuestigatio summae A sequenti modo instituetur:

$A = \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{8}{13}, \frac{29}{34}, \frac{44}{73}, \frac{124}{209}, \frac{300}{501}$, etc.

num. 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, etc.

Fractiones nimirum hic exhibitae continuo propius ad verum valorem ipsius A accedunt, et quidem alternatim eo sunt maiores et minores; ita vt sit:

$A > \frac{0}{1}$; $A > \frac{1}{2}$; $A > \frac{4}{7}$; $A > \frac{20}{34}$; $A > \frac{124}{209}$; etc.

$A < \frac{1}{1}$; $A < \frac{2}{3}$; $A < \frac{8}{13}$; $A < \frac{44}{72}$; $A < \frac{300}{051}$; etc.

Hinc in fractionibus decimalibus erunt ipsius A valores

nimis parui	nimis magni
0,0000000000	1,0000000000
0,5000000000	0,6666666666
0,5714285714	0,6153846153
0,5882352941	0,6027397290
0,5933014354	0,5988023952

Si iam inter terminos nimis magnos et nimis paruos proximos, capiantur media arithmetica, denuo prodibunt valores alternatim nimis magni et nimis parui, qui erunt sequentes:

Valores nimis parui	nimis magni ipsius A
0,5000000000	0,7500000000
0,5833333333	0,6190476190
0,5934065933	0,6018099546
0,5954875100	0,5980205807
0,5960519153	

sicque iam satis prope ad verum valorem ipsius A pertigimus.

§. 23. Poterimus autem valorem istius fractionis infinitae per partes inuestigare hunc in modum:

$$\text{fit } A = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+\cfrac{5}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{7}{1+\cfrac{7}{1+\cfrac{8}{1+\cfrac{8}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{10}{1+\cfrac{10}{1+p}}}}}}}}}}}}}}}}}}$$

$$\text{et } p = \cfrac{11}{1+\cfrac{11}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{13}{1+\cfrac{13}{1+\cfrac{14}{1+\cfrac{14}{1+\cfrac{15}{1+\cfrac{15}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{8}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{10}{1+r}}}}}}}}}}}}}$$

$$\text{et } q = \cfrac{16}{1+\cfrac{16}{1+\cfrac{17}{1+\cfrac{17}{1+\cfrac{18}{1+\cfrac{18}{1+\cfrac{19}{1+\cfrac{19}{1+\cfrac{20}{1+\cfrac{20}{1+r}}}}}}}}}}$$

$$\text{erit } r = \cfrac{21}{1+\cfrac{21}{1+\cfrac{22}{1+\cfrac{22}{1+\cfrac{23}{1+\cfrac{23}{1+\text{ etc. in infinitum.}}}}}}}$$

Quibus valoribus euolutis reperietur:

$$\text{primo } A = \frac{491459820 + 139931620p}{824073141 + 234662231p}$$

$$\text{Deinde } p = \frac{2381951 + 649286q}{887640 + 186440q}$$

$$\text{et } q = \frac{11437136 + 2924816r}{3697925 + 643025r}$$

Supereſt igitur, vt valor ipſius r definiatur, quod quidem aeque difficile, ac ipſius A: ſed ſufficit hic valorem ipſius r proxime tantum noſſe; error enim quidam in valore ipſius r commiſſus, multo minorem errorem in valore ipſius q efficit, hincque denuo longe minor error in valorem ipſius p irrepit: ex quo tandem error valorem ipſius A inquinans omnino erit imperceptibilis.

§. 24. Deinde quia numeratores 21, 21, 22, 22, 23, etc. qui in fractionem continuam ipſius r ingrediuntur, iam propius ad aequalitatis rationem accedunt, ſaltem ab initio: hinc ſubſidium peti poteſt, ad eius valorem propius cognoſcendum. Si enim hi numeratores omnes eſſent aequales, vt eſſet

$$r = \cfrac{21}{1+\cfrac{21}{1+\cfrac{21}{1+\cfrac{21}{1+\text{etc.}}}}}$$

foret $r = \frac{21}{1+r}$

ideoque $rr + r = 21$, et $r = \frac{\sqrt{85}-1}{2}$

Cum

Cum autem hi denominatores crescant, hic valor iusto erit minor: Interim tamen concludere licet, si tres sequentes fractiones continuae constituantur:

$$r = \cfrac{21}{1+\cfrac{22}{1+\cfrac{22}{1+\cfrac{23}{1+\text{etc.}}}}} \qquad s = \cfrac{22}{1+\cfrac{23}{1+\cfrac{23}{1+\cfrac{24}{1+\text{etc.}}}}} \qquad t = \cfrac{23}{1+\cfrac{24}{1+\cfrac{24}{1+\cfrac{25}{1+\text{etc.}}}}}$$

valores quantitatum r, s, t, in arithmetica progressione esse processuros, foreque $r+t=2s$; vnde valor ipsius r satis accurate colligetur. Quo autem haec inuestigatio latius pateat, pro numeris 21, 22, 23, hos indefinitos accipiamus $a-1$, a et $a+1$, vt sit

$$r = \cfrac{a-1}{1+\cfrac{a-1}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+\text{etc.}}}}} \qquad s = \cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a+1}{1+\cfrac{a+1}{1+\text{etc.}}}}} \qquad t = \cfrac{a+1}{1+\cfrac{a+1}{1+\cfrac{a+2}{1+\cfrac{a+2}{1+\text{etc.}}}}}$$

eritque:

$$r = \cfrac{a-1}{1+\cfrac{a-1}{1+s}} \qquad s = \cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+t}}; \text{ vnde efficitur:}$$

$$r = \frac{(a-1)s+a-1}{s+a} \text{ et } s = \frac{at+a}{t+a+1} \text{ seu } t = \frac{(a+1)s-a}{a-s}$$

vnde fit $r+t=\frac{2ss+(2aa-2a+1)s-a}{aa-ss}=2s$: ideoque erit $2s^3+2ss-(2a-1)3-a=0$, ex qua aequatione valorem ipsius s hincque porro valorem ipsius r determinare licet.

§. 25. Sit nunc $a=22$, atque habebimus hanc aequationem cubicam resoluendam.

$$2s^3+2ss-43s-22=0$$

cuius radix statim intra limites 4 et 5 constituta deprehenditur. Sit igitur $s=4+u$, eritque

$$34=69u+26uu+2u^3$$

Sit porro $u=0,4+v$ erit $u^2=0,16+0,8u+vv$ atque $u^3=0,064+0,48v+1,2v^2+v^3$, ideoque.

$$2,112=90,76v+28,4v^2+2v^3$$

vnde erit, proxime $v=0,023$, et $s=4,423$. Cum igitur sit

$$r=\frac{21s+21}{s+22} \text{ fiet } r=\frac{113,883}{26,423}=4,31,$$

hincque porro

$$q=\frac{24043093}{6469363}=3,71645446:$$ vnde obtinetur

$$p=\frac{4794992,85}{15842522,22}=3,026660016\frac{3}{5}:$$ hincque tandem

$$A=\frac{9149852\,59,24}{153431593\,2,90}=0,596347362\,1237$$

qui

qui valor in fractionem continuam conuerſus dat

$$A = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{7+\text{etc.}}}}}}}}}}}}$$

vnde ſequentes inueniuntur fractiones valorem ipſius A proxime exhibentes:

$$A = \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{5}{5}, \frac{31}{52}, \frac{34}{57}, \frac{65}{109}, \frac{294}{493}, \frac{653}{1095}, \frac{1600}{2683}$$

Hae autem fractiones alternatim ſunt maiores et minores quam valor ipſius A, ac vltima quidem $\frac{1600}{2683}$ nimis eſt magna, exceſſus tamen minor eſt quam $\frac{1}{2683 \cdot 1987 \cdot 6}$; vnde cum ſit

$$\frac{1}{A} = \frac{2683}{1600} \text{ erit proxime } \frac{1}{A} = 1,676875$$

§. 26. Methodus, qua ſupra in §. 21. ſum vſus ad ſeriem hanc

$$1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 770x^6 - 5040x^7 + \text{etc.}$$

in

in fractionem continuam conuertendam, latius patet, atque simili modo ad hanc seriem multo generaliorem applicari potest

$$z = 1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 + m(m+n)(m+2n)(m+3n)x^4 - \text{etc.}$$

reperietur enim iisdem operationibus institutis:

$$z = \cfrac{1}{1+mx}\cfrac{}{1+nx}\cfrac{}{1+(m+n)x}\cfrac{}{1+2nx}\cfrac{}{1+(m+2n)x}\cfrac{}{1+3nx}\cfrac{}{1+(m+3n)x}\cfrac{}{1+4nx}\cfrac{}{1+(m+4n)x}\cfrac{}{1+5nx}\cfrac{}{1+\text{etc.}}$$

Eadem vero expressio, aliaeque similes facile erui possunt ope theorematum, quae in dissertationibus meis de fractionibus continuis in Comment. Acad. Petropol. demonstraui. Ostendi enim huic aequationi:

$$ax^{m-1}dx = dz + ex^{n-m-1}z\,dx + bx^{n-1}z\,dx$$

satis-

satisfacere hunc valorem

$$z = \cfrac{ax^m}{m+(ac+mb)x^n \atop m+n+(ac-nb)x^n \atop m+2n+(ac+(m+n)b)x^n \atop m+3n+(ac-2nb)x^n \atop m+4n+(ac+(m+2n)b)x^n \atop m+5n+(ac-3nb)x^n \atop m+6n+\text{etc.}}$$

Si igitur sit $c = 0$ erit $dz + bx^{n-1}z\,dx = ax^{m-1}dx$, et $e^{\frac{bx^n}{n}}z = a\int e^{\frac{bx^n}{n}}x^{m-1}dx$ et $z = ae^{-\frac{bx^n}{n}}\int e^{\frac{bx^n}{n}}x^{m-1}dx$, et per seriem

$$z = \frac{ax^m}{m} - \frac{abx^{m+n}}{m(m+n)} + \frac{ab^2x^{m+2n}}{m(m+n)(m+2n)} - \frac{ab^3x^{m+3n}}{m(m+n)(m+2n)(m+3n)} + \text{etc.}$$

In hac autem forma nostra, quam tractamus, non continetur.

§. 27. Inueni autem porro, si habeatur haec aequatio:

$$\int x^{m+n}dx = x^{m+1}dz + ax^mz\,dx + bx^nz\,dx + czz\,dx$$

valorem ipsius z per huiusmodi fractionem infinitam exprimi:

$$z = \cfrac{fx^m}{b+(mb+ab+cf)x^{m-n} \atop b+(mb+nb+cf)x^{m-n} \atop b+(2mb-nb+ab+cf)x^{m-n} \atop b+(2mb-2nb+cf)x^{m-n} \atop b+(3mb-2nb+ab+cf)x^{m-n} \atop b+(3mb-3nb+cf)x^{m-n} \atop b+\text{etc.}}$$

Quo igitur eundem valorem z commode per seriem ordinariam exprimere queamus, fit $c = o$, vt habeatur haec aequatio:

$$\int x^{m+n-1} dx = x^{m+1} dz + a x^m z\, dx + b x^n z\, dx.$$

eritque per fractionem continuam:

$$z = \cfrac{\int x^m}{b + \cfrac{b(m+a)x^{m-n}}{b + \cfrac{b(m-n)x^{m-n}}{b + \cfrac{b(2m-n+a)x^{m-n}}{b + \cfrac{b(2m-2n)x^{m-n}}{b + \cfrac{b(3m-2n+a)x^{m-n}}{b + \cfrac{b(3m-3n)x^{m-n}}{b + \text{etc.}}}}}}}}$$

Integrando vero erit $x^a e^{bx^{n-m}} : (n-m) z = \int\!\!\int e^{bx^{n-m}} : (n-m) x^{a+n-1} dx^2$ seu fit $m-n = k$ erit $z = \int e^{b:k x^k} x^{-a} \int e^{-b:k x^k} x^{a+n-1} dx^2$, si quidem integratio ita instituatur, vt z euanescat, posito $x = o$. Per seriem autem infinitam erit:

$$z = \frac{f}{b} x^m - \frac{(m+a)\int x^{2m-n}}{b^2} + \frac{(m+a)(2m-n+a)\int x^{3m-2n}}{b^3}$$
$$- \frac{(m+a)(2m-n+a)(3m-2n+a)\int x^{4m-3n}}{b^4}$$
$$+ \frac{(m+a)(2m-n+a)(3m-2n+a)(4m-3n+a)\int x^{5m-3n}}{b^5} - \text{etc.}$$

§. 28. Quo hae expressiones fiant simplices, neque tamen earum extensioni vis inferatur, ponatur $b = 1$;

$b = 1$; $f = 1$; $m + a = p$; $m - n = q$; vt sit $a = p - m$; et $n = m - q$; habebiturque haec aequatio differentialis:

$$x^m dx = x^{q+1} dz + (p - m) x^q z\, dx + z\, dx$$

cuius primo integrale est: $z = e^{1 : qx^q} x^{m-p} \int e^{-1 : qx^q} x^{p-q-1} dx$

Idem porro valor quantitatis z per sequentem seriem infinitam exprimetur:

$$z = x^m - px^{m+q} + p(p+q)x^{m+2q} - p(p+q)(p+2q)x^{m+3q} + \text{etc.}$$

Denique huic seriei aequiualebit ista fractio continua:

$$z = \cfrac{x^m}{1 + \cfrac{px^q}{1 + \cfrac{qx^q}{1 + \cfrac{(p+q)x^q}{1 + \cfrac{2qx^q}{1 + \cfrac{(p+2q)x^q}{1 + \cfrac{3qx^q}{1 + \cfrac{(p+3q)x^q}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}$$

quae expressio plane congruit cum ea, quam ante §. 26 sumus adepti, et quoniam de modo, quo illam eruimus, adhuc dubitari posset, vtrum numeratores secundum legem obseruatam in infinitum progrediantur nec ne? hoc dubium iam penitus erit sublatum. Suppeditat ergo haec consideratio methodum certam innumerabiles series divergentes summandi, seu valores ipsis aequiualentes inueniendi: inter quas ea, quam tractauimus est casus particularis.

§. 29. Videtur autem porro casus memoratu dignus, quo est $p = 1$, et $q = 2$, atque $m = 1$; erit enim $z = e^{+xxx} \int e^{-1:2xxx} dx : xx$
atque series infinita ita se habebit:

$$z = x - 1x^3 + 1.3x^5 - 1.3.5x^7 + 1.3.5.7x^9 - \text{etc.}$$

quae aequalis est huic fractioni continuae:

$$z = \cfrac{x}{1 + \cfrac{1xx}{1 + \cfrac{2xx}{1 + \cfrac{3xx}{1 + \cfrac{4xx}{1 + \cfrac{5xx}{1 + \cfrac{6xx}{1 + \text{etc.}}}}}}}}$$

Si itaque ponatur $x = 1$, vt fiat:

$z = 1 - 1 + 1.3 - 1.3.5 + 1.3.5.7 - 1.3.5.7.9 + \text{etc.}$

quae est series maxime diuergens: eius tamen valor exprimi potest per hanc fractionem continuam conuergentem:

$$z = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{5}{1 + \text{etc.}}}}}}}$$

quae

quae sequentes suppeditat fractiones, vero ipsius z valori proxime aequales:

$$z = \frac{0}{1};\ \frac{1}{1};\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{4};\ \frac{6}{10};\ \frac{18}{26};\ \frac{48}{76};\ \frac{156}{232};\ \frac{492}{764};\ \frac{1740}{2620};\ \frac{6168}{9496};\ \frac{23568}{35696}$$

Si igitur sit: $z = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}}}}}}}}}}}$

erit $z = \dfrac{23568 + 6168p}{35696 + 9496p}$

seu $z = \dfrac{2946 + 771p}{4462 + 1187p}$ et $p = \cfrac{11}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+p}}}}$

sit $p = \dfrac{11}{1+q}$ et $q = \dfrac{12}{1+r}$; erit $r = \dfrac{12-q}{q}$

atque cum p, q, r vniformiter crescant, erit $2q\frac{12+12q-qq}{q+qq}$ et $2q^3+3qq-22q-12=0$; vbi proxime $q=3,06$; $p=2,709$; et $z = \frac{5034,630}{7677,583} = 0,655758$.